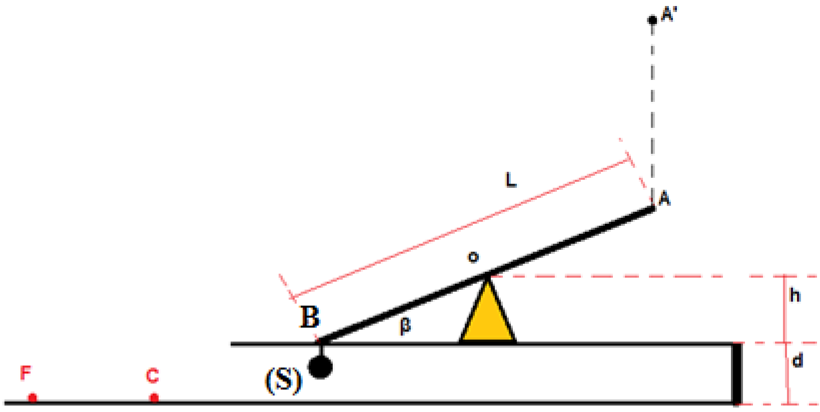
Série de révision n°3

Energie cinétique - mouvement d'un projectile

Exercice n°1 :

Pour tout l'exercice on prendra $\|\vec{g}\|$=10 N.kg^{-1} et on négligera toute force résistive.

Une plaque rectangulaire de longueur L, peut tourner librement autour d'un axe fictif confondu avec la médiatrice de sa longueur et passant par le sommet O d'un support triangulaire de hauteur $h = 0.5\ m$. Ce support est fixé horizontalement tel qu'il soit éloigné du sol d'une distance d. Au début, la plaque est horizontale. On fixe à l'une des extrémités de la plaque qu'on note B, un solide (S) de masse $M = 1kg$. Alors, la plaque s'incline d'un angle β par rapport à l'horizontale (voir la figure ci-dessous).



On lâche un solide (s) de masse $m = 100g$ sans vitesse à partir d'un point A' situé à une distance d' sur le point A situé à l'extrémité libre de la plaque. Partant en chute libre, (s) atteint le point A permettant de ramener la plaque en une position horizontale, puis la plaque revient à sa position d'équilibre à nouveau et (s) se met à glisser sans frottement le long de la plaque jusqu'à atteindre le point B avec une vitesse V. Une seconde plus tard, (s) touche le sol en un point C avec une vitesse $V' = 10\ m\,.\,s^{-1}$.

1) a- Montrer que $d' = h.(\frac{M}{m} - 1)$ puis calculer cette distance.

   b-Calculer V.

2) a-Ecrire β en fonction de V, V' et g.

   b- En déduire l'expression littérale de L.

   c- En déduire β, L et d.

A la suite de l'exercice, on fera quelques essais à l'aide d'un canon cylindrique permettant de lancer des solides. Il présente un ressort lié à une plaque sur laquelle on met le solide à lancer en un point noté Q. On supposera que pour chaque essai le canon est incliné d'un angle $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{30°}$.

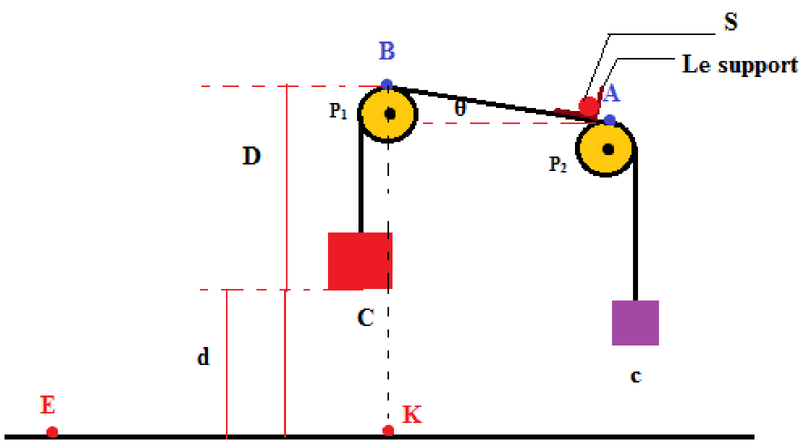
3) a- Comment doit-on placer le canon de sorte que le solide (s) permet de ramener instantanément, la plaque en une position horizontale sachant qu'il permet de lancer (s) avec une vitesse $\boldsymbol{V_0} = \mathbf{10.5}\boldsymbol{m.s^{-1}}$ (Repérer la position de Q sachant que (s) arrivera au point A).

   b- Maintenant, Q est situé dans un plan vertical passant par un point F du sol (voir la figure ci-dessus) : $\boldsymbol{FQ} = \mathbf{4.5}\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{OQ} = \mathbf{12}\ \boldsymbol{m}$. Vérifier que $\boldsymbol{FQ} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{d}$.

   c -Calculer alors l'angle que fait la plaque instantanément avec sa position d'équilibre sachant que le canon permet de lancer le solide (s) avec une vitesse $\boldsymbol{V_0} = \mathbf{12}\boldsymbol{m.s^{-1}}$

Exercice n°2 :

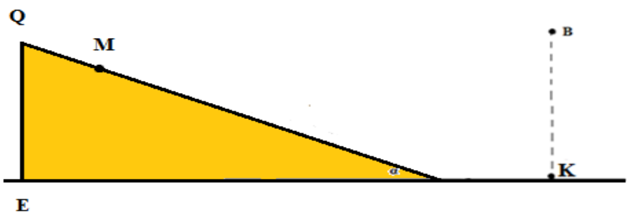
Deux cubes fabriqués en bois, notés (c) et (C), sont reliés par un fil inextensible supposé de masse négligeable. Celui-ci, peut se déplacer sans frottement par les gorges de deux poulies de masses pratiquement nulles. Ce fil est incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale, sur lequel, on a fixé un support pouvant supporter un solide ponctuel (S). Le système (solide + support) est d'une masse m de faible valeur. Les cubes (C) et (c) sont d'arrêtes respectives $\boldsymbol{b_1}$ et $\boldsymbol{b_2}$ de sorte que $\boldsymbol{b_1} = \mathbf{4}.\boldsymbol{b_2}$. Au repos, (C) est éloigné d'une distance $\boldsymbol{d} = \mathbf{1}\boldsymbol{m}$ par rapport au sol. (Voir la figure ci-dessous).



On laisse le système à lui-même. Partant du point A sans vitesse, (S) quitte le fil au point B avec une vitesse $\boldsymbol{V_B}$. Au moment même, (C) atteint le sol.

1) Donner l'expression littérale de $\boldsymbol{V_B}$ puis la calculer.

2) Le point B est éloigné du sol d'une distance $D = 3m$. Après avoir quitté le point B, (S) atteint le sol en un point E tel que EK=D. Calculer alors θ, puis le temps du trajet parcouru par (S) de B vers E.
3) On modifie la position de (P_1) de sorte que (P_1) et (P_2) soient dans un même plan horizontal passant par le centre de (P_2) en rapprochant (P_2) de (P_1) de manière que le solide quitte le fil au point B. Calculer la nouvelle vitesse de (S) lorsqu'il quitte le fil (on la notera v').
4) Donner à quelle distance et après quel moment (S) atteint-il le sol ((P_1) et (P_2) étant encore horizontales).
5) On rend les poulies à leur position initiale, et on fixe un plan triangulaire incliné d'un angle $\alpha = 10°$. Son sommet Q a pour projection sur le sol, le point E, tel que $EQ = D$ (voir la figure ci-dessous)



(S) atteint le plan en un point M. Donner alors la position du point M sur le plan.

6) Comment doit-on placer le plan de sorte qu'il ne soit pas touché par (S) ?

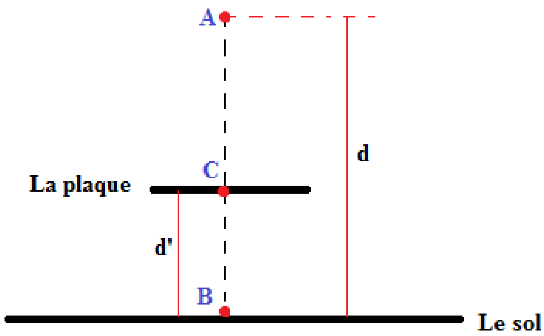
(On distinguera deux cas).

Exercice n°3 :

Un solide (S) de masse m= 1.5 kg est lâché sans vitesse d'une distance d du sol. Après avoir heurté le sol, (S) saute vers le haut d'une distance d'.

1) a- Montrer que $d = d'$.

b- On lâche (S) de nouveau d'une altitude d=2m. Lorsqu'il atteint le point B (voir la figure ci-dessous), on fixe horizontalement et rapidement à une distance d' du sol, une plaque solide. (S) quitte le point B et heurte la plaque en un point C, puis revient au point B et le mouvement se répète sans cesse (Voir la figure ci-dessous).



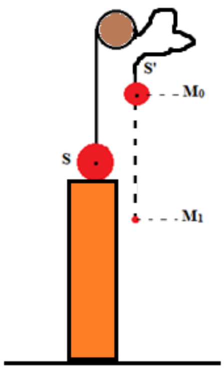
Expliquer l'infinité du mouvement du solide (S).

c- Sachant que le mouvement de C à B, pour un trajet unique dure 0.1 s, calculer d'.

2) Maintenant, on relie (S) par un solide (S') de masse $\boldsymbol{m' = 500g}$, par un fil inextensible de masse négligeable pouvant se déplacer sans frottement par la gorge d'une poulie. Celle-ci est ainsi de masse négligeable.

a- Que se passe t-il lorsqu'on abandonne le système ? (Justifier par le calcul).

b- On empêche le mouvement du système $((\boldsymbol{S}) + (\boldsymbol{S'}))$ en fixant $(\boldsymbol{S'})$ en un point M_0, puis on tire le fil à coté de (S) et on laisse (S) se reposer sur un support. Au fur et au mesure, on lâche (S'). Celui-ci se met à se déplacer. Lorsqu'il atteint le point M_1, (S) monte vers le haut de 10 cm, puis il rebrousse chemin et se dirige vers le support (voir la figure ci-dessous).



En comparant ce résultat au premier, dire quelle explication justifie le dernier résultat ?

c- Calculer la distance M_0M_1.

Exercice n°4 :

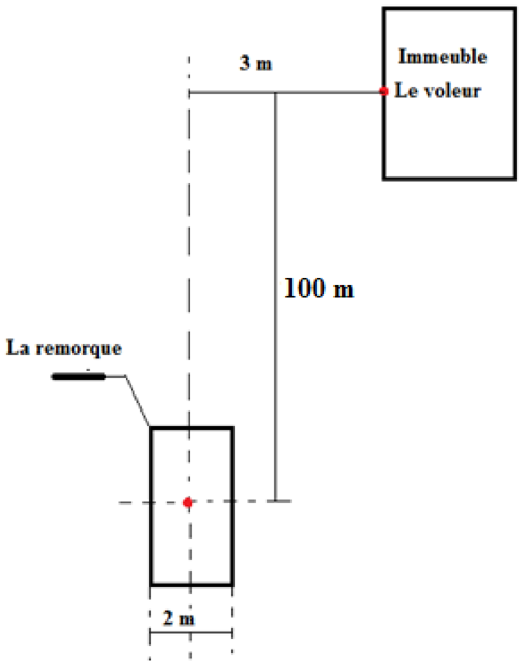
Un solide ponctuel (S) est lancé suivant un angle $\boldsymbol{\theta}$ par rapport à l'horizontale avec une vitesse $\boldsymbol{V = 400\ m\,.\,s^{-1}}$. Après une petite durée, il se trouve à une distance d=2m de son point de départ qu'on note P et à une hauteur $\boldsymbol{h = 1m}$ par rapport au sol pour occuper un point Q.

1) Etablir les expressions littérales des équations horaires du mouvement de (S).

2) En déduire que le mouvement du solide de P à Q est pratiquement rectiligne.
3) Déduire de ce qui précède la mesure de $\boldsymbol{\theta}$.
4) A quel instant et avec quelle vitesse le solide rebrousse t-il chemin ?

Exercice n°5 :

Après être éventé, un voleur en train de pirater un immeuble, monte au dernier étage éloigné de 100 m du sol. Bouleversé par les habitants, il saute d'un angle $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{45}°$ par rapport à l'horizontale. Heureusement, un camion dont la remorque de largeur $\boldsymbol{l} = \mathbf{2}\ \boldsymbol{m}$ est pleine d'éponge, passe à 3 m auprès de l'immeuble. Alors, le voleur tombe exactement au milieu de la remorque ! Celle-ci est éloignée de 1.5 m du sol. Au même temps que le voleur saute, le camion se déplace sur une trajectoire rectiligne avec une vitesse V constante, éloigné de 100 m de la projection du point du saut du voleur, sur le sol (Voir la figure ci-dessous).



Calculer la vitesse $\boldsymbol{V}$ de ce camion.

Corrigés

Exercice n°1 :

1) $\boldsymbol{a}-$ *Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A' et A :*

On a

$$A' \xrightarrow{\Delta Ec} A = \sum A' \xrightarrow{W} A\,(\overrightarrow{F_{ext}}) \text{ d'où } \frac{1}{2}\,m.(V_A^2 - V_{A'}^2) = A' \xrightarrow{W(\overrightarrow{P_{(s)}})} A$$

$Par\ suite\ \frac{1}{2}\ m\ (V_A^2 - V_{A'}^2) = m.\|\vec{g}\|.d' \quad Or\ V_{A'} = 0, alors\ \boxed{V_A^2 = 2.\|\vec{g}\|d'}$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et T avec T : un point de la plaque en position horizontale appartenant à (AA') :

$$A \xrightarrow{\Delta Ec} T = \sum A \xrightarrow{W} T\,(\overrightarrow{F_{ext}}) \text{ d'où } \frac{1}{2}\,m.(V_T^2 - V_A^2) = A \xrightarrow{W(\overrightarrow{P_{(s)}})} T\ - A \xrightarrow{W(\overrightarrow{P_{(S)}})} T$$

$Par\ suite\ \frac{1}{2}\ m\ (V_T^2 - V_A^2) = m.\|\vec{g}\|.h\ -\ M.\|\vec{g}\|.h$

Or au point T la vitesse de (s)s'annule d'où:

$$-\frac{1}{2}\,m.V_A^2 = m.\|\vec{g}\|.h\ -\ M.\|\vec{g}\|.h$$

$$\Rightarrow \quad m.\|\vec{g}\|d' = \|\vec{g}\|.h.(M-m)$$

$$\Rightarrow \quad d' = \frac{h.(M-m)}{m} \Rightarrow \boxed{d' = h.(\frac{M}{m} - 1)} \quad A.N : d' = 0.5 \times \left(\frac{1}{0.1} - 1\right) \Rightarrow d' = 4.5\ m$$

b- *Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et B :*

$$A \xrightarrow{\Delta Ec} B = \sum A \xrightarrow{W} B\,(\overrightarrow{F_{ext}}) \rightarrow \frac{1}{2}.m.(V^2 - V_A^2) = 2.m.\|\vec{g}\|.h$$

$$Or\ \ VA = 0 \ \Rightarrow \ \boxed{V^2 = 4.\|\vec{g}\|.h}$$

$$\Rightarrow \ \boxed{V = 2.\sqrt{\|\vec{g}\|.h}}$$

$$A.N : V = 2.\sqrt{10 \times 0.5}$$
$$= 4.47\ m.s-1$$

2) a- *Adoptons un repère orthonormé d'origine B, d'axe d'abscisses horizontal et dont le sens positif est celui du mouvement de (s).*

$D'après\ la\ R.F.D, on\ a :$ $\quad m.\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \Rightarrow m.\vec{a} = m.\vec{g}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

$Par\ suite, on\ a :\ \vec{a} = o.\vec{\imath} + (-\|\vec{g}\|).\vec{\jmath}$

$$Or\ \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}\ d'où\ \overrightarrow{V'} = V.\cos\beta.\vec{\imath} + (-\|\vec{g}\|.t + V.\sin\beta).\vec{\jmath}$$

$Par\ suite, on\ a : V'^2 = V^2 + g^2.t^2 - 2.g.V'.t.\sin\beta$

$$Alors :\ \sin\beta = \frac{V^2 + g^2.t^2 - V'^2}{2.g.V.t}\ Or\ t = 1s\ alors\ \boxed{\sin\beta = \frac{V^2 + g^2 - V'^2}{2.g.V}}$$

b- $On\ a : L.\sin\beta = 2.h \qquad \Rightarrow L = \frac{2.h}{\sin\beta}$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{2.g.V}{V^2 + g^2 - V'^2}}$$

c- $On\ a\ \sin\beta = \frac{V^2 + g^2 - V'^2}{2.g.V}$

$A.N : \sin\beta = \frac{4.47^2 + 10^2 - 10^2}{2 \times 10 \times 4.47} = 0.22 \Rightarrow \beta = 13°$

$On\ a\ L = \frac{2.g.V}{V^2 + g^2 - V'^2}$

$A.N : L = \frac{2 \times 10 \times 10}{10^2 + 10^2 - 4.47^2} \Rightarrow L = 1.11\ m$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre B et C :

$$\frac{1}{2}.m.(V^2 - V'^2) = m.\|\vec{g}\|.d \qquad \Rightarrow \boxed{d = \frac{(V^2 - V'^2)}{2.\|\vec{g}\|}}$$

$$A.N : d = \frac{(10^2 - 4.47^2)}{2 \times 10} \Rightarrow d = 4\ m$$

3) $D'après\ la\ question\ 1)\ a -\ on\ a\ \boxed{V_A^2 = 2.\|\vec{g}\|.d'} \Rightarrow VA = \sqrt{2.\|\vec{g}\|.d'}$

$$\Rightarrow V_A = \sqrt{2 \times 10 \times 4.5}$$

$$\Rightarrow V_A = 9.5\ m.s^{-1}$$

Alors, arrivant au point A avec une vitesse $V_A = 9.5 m.s^{-1}$, *le solide (s) permet de ramener la plaque en une position horizontale. Considérons un repère orthonormé d'origine Q dont l'axe des abscisses est parallèle à l'horizontale et le sens positif est celui du mouvement de (s).*

$D'après\ la\ R.F.D, on\ a :\qquad m.\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \Rightarrow m.\vec{a} = m.\vec{g}$

$$\Longrightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

$Par\ suite, on\ a: \vec{a} = o.\vec{\imath} + (-\|\vec{g}\|).\vec{\jmath}$

$Or\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ $D'où\ \vec{V} = V_0.cos\ \alpha.\vec{\imath} + (-\|\vec{g}\|.t + V_0.sin\ \alpha).\vec{\jmath}$

$\Longrightarrow V^2 = V_0^2 + \|\vec{g}\|^2.t^2 - 2.V_0.sin\ \alpha.\|\vec{g}\|.t$

$\Longrightarrow \|\vec{g}\|^2.t^2 - 2.V_0.sin\ \alpha.\|\vec{g}\|.t + V_0^2 - V^2$

$D'où: \Delta' = V_0^2.sin^2\alpha.\|\vec{g}\|^2 + \|\vec{g}\|^2.(V^2 - V_0^2)$ $A.N: \Delta' = 456.25 \Longrightarrow \sqrt{\Delta'} = 27.5$

Par suite $t = 0.25\ s$ *ou* $t = 0.8\ s$ *: La valeur la plus grande est la correcte car elle correspond à une descente alors que la première correspond à une ascension du solide (s).*

$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{QA}}{dt}$ D'où $\overrightarrow{QA} = V_0.cos\ \alpha.t.\vec{\imath} + (-\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.sin\ \alpha.t).\vec{\jmath}$

D'où $\overrightarrow{QA}\begin{pmatrix} V_0.\cos\ \alpha.t \\ -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin\ \alpha.t \end{pmatrix}$ $A.N: \boxed{\overrightarrow{QA}\begin{pmatrix} 7.27 \\ 1 \end{pmatrix}}$

4) ***a*** – On remarque que FQ=4.5= 4 + 0.5 Par suite $\boxed{FQ = h + d}$.

b – *Gardons le repère des propriétés précédentes. Soit M le point d'impact entre le solide(s) et la plaque or* $\boxed{FQ = h + d}$ *alors Q est situé dans un plan parallèle à l'horizontale et passant par O. Par suite, on a :*

$\boxed{x = OM.\cos\beta + OQ}$ (1) *Et* $\boxed{y = OM.sin\ \beta}$ (3)

D'après les équations horaires précédentes, on a :

$\boxed{x = V_0.cos\ \alpha.t}$ (2) *Et* $\boxed{y = -\frac{1}{2}.\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.sin\ \alpha.t}$ (4)

$1\ et\ 2\ donnent: OM.cos\ \beta + OQ = V_0.cos\ \alpha.t$

$\Longrightarrow \boxed{OM = \dfrac{V_0.cos\ \alpha.t - OQ}{\cos\beta}}$ (5)

3, 4 et 5 donnent : $-\frac{1}{2}.\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.sin\ \alpha.t - (V_0.cos\ \alpha.t - OQ).\tan\beta = 0$

$\Longrightarrow -\frac{1}{2}.\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.sin\ \alpha.t - V_0.cos\ \alpha.t.\tan\beta + OQ.\tan\beta = 0$

$\Longrightarrow \|\vec{g}\|.t^2 - 2.V_0.sin\ \alpha.t + 2.V_0.cos\ \alpha.t.\tan\beta - 2OQ.\tan\beta = 0$

$\Longrightarrow \|\vec{g}\|.t^2 + 2.V_0.(cos\ \alpha.\tan\beta - sin\ \alpha).t - 2OQ.\tan\beta = 0$

$\Longrightarrow \Delta' = [V_0.(cos\ \alpha.\tan\beta - sin\ \alpha)]^2 + 2OQ.\tan\beta.\|\vec{g}\|$

A.N : $\Delta' = 68.37 \Longrightarrow \sqrt{\Delta'} = 8.26 \Longrightarrow t = 1.18$ s

Or $\boxed{OM = \frac{V_0.\cos\alpha.t - OQ}{\cos\beta}}$ d'où : OM= 0.27 m

Les forces exercées sur (s) au point M sont le poids de (s) et la force exercée par (S) qu'on note $\vec{F}$ *. Par suite :* $\|\vec{P}_{(S)}\|.OB = \|\vec{F}\|.OM \Longrightarrow \|\vec{F}\| = \frac{\|\vec{P}_{(S)}\|.OB}{OM}$

$$\Longrightarrow \boxed{\|\vec{F}\| = \frac{\|\vec{P}_{(S)}\|.L}{2.OM}}$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre le point M et un point N qu'on suppose le point d'annulation de la vitesse de (s).

$$Alors : M \xrightarrow{\Delta Ec} N = \sum M \xrightarrow{W} N\ (\overrightarrow{F_{ext}})\ \ d'où\ \ \frac{1}{2}.m.(V_N^2 - V_M^2) = M \xrightarrow{W(\overrightarrow{P_{(s)}})} N - M \xrightarrow{W(\vec{F})} N$$

$$Par\ suite\ \frac{1}{2}.m.(V_N^2 - V_M^2) = m.\|\vec{g}\|.MN - \|\vec{F}\|.MN \quad Or\ V_N = 0$$

$$D'où : \quad \frac{1}{2}.m.V_M^2 = \frac{\|\vec{P}_{(S)}\|.L}{2.OM}.MN - m.\|\vec{g}\|.MN$$

$$\Longrightarrow \boxed{MN = \frac{m.V_M^2.OM}{\|\vec{P}_{(S)}\|.L - 2.m.\|\vec{g}\|.OM)}}$$

D'après les équations horaires du mouvement de (s), on a :

$$V^2 = V_0^2 + \|\vec{g}\|^2.t^2 - 2.V_0.\sin\alpha.\|\vec{g}\|.t$$

$$t = 1.18\ s \qquad A.N : V_M = 11.9\ m.s^{-1}$$

Par suite : $MN = 0.36m$.

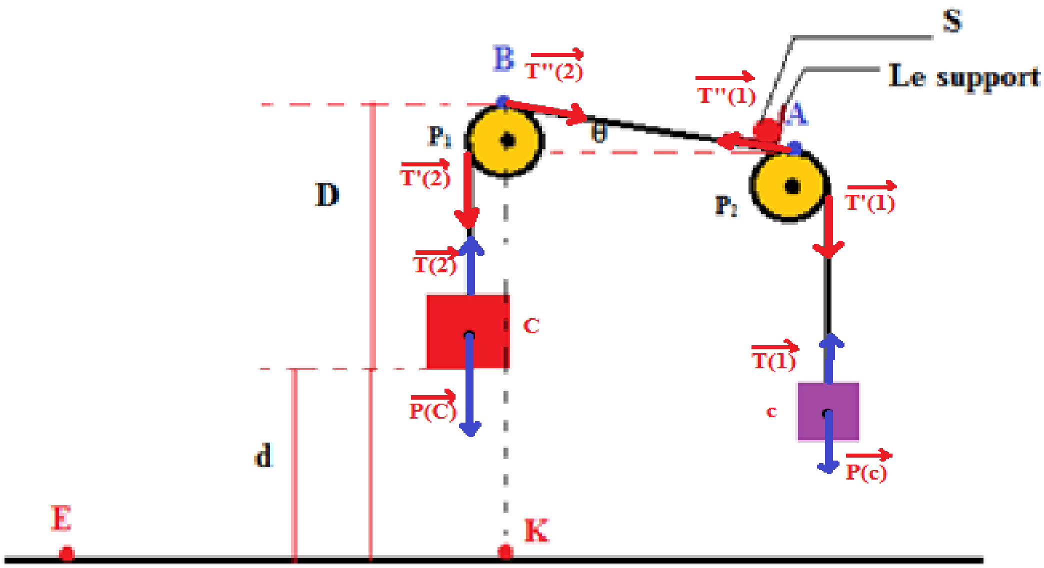
Soit θ *l'angle que fait la plaque avec sa position d'équilibre et* θ' *l'angle que fait la plaque avec l'horizontale en inclinaison maximale (lorsque sa vitesse s'annule au point N).*

Après avoir faire une représentation géométrique en respectant les ordres de grandeur, on obtient :

$\tan\theta' = \frac{MN - OM.\sin\beta}{OM.\cos\beta}$ A.N : $\tan\theta' = 1.13 \Longrightarrow \theta' = 48.68°$ Or $\theta = \beta + \theta'$

$$\Longrightarrow \theta = 61.68°$$

Exercice n°2 :



1) $D'après la\ R.F.D, on\ a:\ -m.\|\vec{g}\| + \left\|\overrightarrow{T(1)}\right\| = m.a\ \ (1)$

$$M.\|\vec{g}\| - \left\|\overrightarrow{T(2)}\right\| = M.a\ (2)$$

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{T"(1)}\right\|.\cos\theta.r_{P(2)} - \left\|\overrightarrow{T(1)}\right\|.r_{P(2)} = J(2).\ddot{\theta} \\ \left\|\overrightarrow{T'(2)}\right\|.r_{P(1)} - \left\|\overrightarrow{T"(2)}\right\|.r_{P(1)}.\cos\theta = J(1).\ddot{\theta} \\ les\ poulies\ sont\ de\ masses\ négligeable\ alors\ leurs\ moments\ d'inertie\ sont\ nuls \end{cases}$$

Alors : $\left\|\overrightarrow{T"(1)}\right\|.\cos\theta = \left\|\overrightarrow{T(1)}\right\|\ \ et\ \ \left\|\overrightarrow{T"(2)}\right\|.\cos\theta = \left\|\overrightarrow{T'(2)}\right\|$ Or :

$\left\|\overrightarrow{T'(1)}\right\| = \left\|\overrightarrow{T(1)}\right\|, \left\|\overrightarrow{T(2)}\right\| = \left\|\overrightarrow{T'(2)}\right\|\ et\ \left\|\overrightarrow{T"(2)}\right\| = \left\|\overrightarrow{T"(1)}\right\|$ *car le fil est de masse négligeable.*

Par suite : $\left\|\overrightarrow{T(1)}\right\| = \left\|\overrightarrow{T'(2)}\right\| = \left\|\overrightarrow{T(2)}\right\|$

$\Longrightarrow$D'après (1) et (2), on a : $-m.\|\vec{g}\| + M.\|\vec{g}\| = m.a + M.a$

$\Longrightarrow \|\vec{g}\|.(M-m) = a.(M+m)$

$\Longrightarrow \boxed{a = \frac{\|\vec{g}\|.(M-m)}{(M+m)}}$ *Or le mouvement du système* $\big((\boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{c})\big)$*est rectiligne, d'ou :*

$V_B^2 - V_A^2 = 2.a.d \Longrightarrow V_B^2 = 2.a.d + V_A^2$ *Or au point A la vitesse est nulle d'ou:*

$V_B^2 = 2.a.d = 2.\frac{\|\vec{g}\|.(M-m)}{(M+m)}.d$ *Les cubes sont homogènes (fabriqués en bois), d'ou:*

$M = V_{olume(C)} \times \rho_{bois} = b_1^3 \times \rho_{bois}\ \ et\ \ m = V_{olume(c)} \times \rho_{bois} = b_2^3 \times \rho_{bois}$

$$Par\ suite : V_B^2 = 2.\frac{\|\vec{g}\|.(b_1^3 \times \rho_{bois} \ - b_2^3 \times \rho_{bois}\ )}{(b_1^3 \times \rho_{bois}\ + b_2^3 \times \rho_{bois}\ )}.d = 2.\|\vec{g}\|.\frac{(b_1^3 - b_2^3)}{(b_1^3 + b_2^3)}.d$$

$$Par\ suite : \ V_B = \sqrt{2.\|\vec{g}\|.\frac{(b_1^3 - b_2^3)}{(b_1^3 + b_2^3)}} \Longrightarrow V_B = \sqrt{2.\|\vec{g}\|.\frac{(64b_2^3 - b_2^3)}{(64b_2^3 + b_2^3)}}.d$$

$$\Longrightarrow \boxed{V_B = \sqrt{2.\|\vec{g}\|.\frac{64}{65}}\ .\mathrm{d}}$$

$$A.N: \ V_B = 4.43\ m.s^{-1}$$

2) *On considère un repère orthonormé dont l'origine est B et le sens positif est celui du mouvement du solide.*

$$D'après\ la\ R.F.D, on\ a : \qquad m.\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \Longrightarrow m.\vec{a} = m.\vec{g} \Longrightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

$$Par\ suite, on\ a : \ \vec{a} = o.\vec{\imath} + (-\|\vec{g}\|).\vec{\jmath}$$

$$Or\ \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \ \ D'où\ \vec{V} = V_B.cos\ \theta.\vec{\imath} + (-\|\vec{g}\|.t + V_B.sin\ \theta).\vec{\jmath}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{BM}}{dt} \ \ \text{D'où}\ \overrightarrow{BM} = V_B.\cos\theta\ .t.\vec{\imath} + (-\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_B.\sin\ \theta\ .t).\vec{\jmath}$$

$$Par\ suite: \ \ x = V_B.cos\ \theta.t \Longrightarrow t = \frac{x}{V_B.cos\ \theta} \ \ et\ y = -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_B.\sin\ \theta\ .t$$

$$\Longrightarrow y = -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.\left(\frac{x}{V_B.cos\ \theta}\right)^2 + V_B.\sin\theta\ .\frac{x}{V_B.cos\ \theta}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = \frac{-\|\vec{g}\|}{2.V_B^2.cos^2\ \theta}\ x^2 + tan\theta\ .\mathrm{x}}$$

$$\text{Alors} : \frac{-\|\vec{g}\|}{2.V_B^2.cos^2\ \theta}\ x^2 + tan\theta\ .\mathrm{x} - \mathrm{y} = 0 \Longrightarrow \frac{-\|\vec{g}\|}{2.V_B^2.cos^2\ \theta}\ D^2 + tan\theta\ .\mathrm{D} + \mathrm{D} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{-\|\vec{g}\|}{2.V_B^2.cos^2\ \theta}\ D + tan\theta\ + 1 = 0$$

$$Or\ ona\ cos\ ^2\theta = \frac{1}{1 + tan^2\theta} \ \ d'ou : \ \frac{-\|\vec{g}\|}{2.V_B^2}(1 + tan^2\theta).D + tan\theta\ + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{-\|\vec{g}\|}{2.V_B^2}tan^2\theta.D + tan\theta - \frac{\|\vec{g}\|}{2.V_B^2}D + 1 = 0$$

$$Posons: tan\theta = X \quad d'ou : \frac{-\|\vec{g}\|}{2.V_B^2}D.X^2 + X - \frac{\|\vec{g}\|}{2.V_B^2}D + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow\ X^2-\frac{2.V_B^2}{\|\vec{g}\|.D}X+1-\frac{2.V_B^2}{\|\vec{g}\|.D}=0$$

$$\Longrightarrow \Delta'=(\frac{V_B^2}{\|\vec{g}\|.D})^2-1+\frac{2.V_B^2}{\|\vec{g}\|.D}$$

$A.N: \Delta' = 0.73 \Longrightarrow \sqrt{\Delta'} = 0.86 \Longrightarrow X = 1.51 \Longrightarrow \theta = 56.55°$

$x = V_B.\cos\theta.t \Longrightarrow t = \frac{x}{V_B.\cos\theta}$ $\ A.N: t = 1.23\ s$

3) $D'après\ la\ question\ (1), on\ a : V = \sqrt{2.\|\vec{g}\|.\frac{64}{65}}\,.\mathrm{d}$, Or d a changé après cette mo − $dification : d = 1 - 1\times \sin\theta = 0.16m\ par\ suite: V' = 0.71 m.s^{-1}$.

4) $On\ appliquant\ la\ R.F.D, on\ obtient :\ y = -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_B.\sin\theta.t, \sin\theta$ $étant$ $nul\ car\ les\ poulies\ sont\ horizontales\ d'ou :$ $\boxed{y = -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2}$ $Et\ on\ a :$

$$y=-(D-d.\sin\theta)\Longrightarrow t^2=2.\frac{(D-d.\sin\theta)}{\|\vec{g}\|}\Longrightarrow \boxed{t=\sqrt{2.\frac{(D-d.\sin\theta)}{\|\vec{g}\|}}}$$

$A.N: t = 0.66\ s$

$On\ a\ :\ \ x = V'.\cos\theta.t\ Or\ \ \theta = 0\ \Longrightarrow x = V'.t\ \ \Longrightarrow x = 46\ cm$

5) $En\ ce\ servant\ de\ la\ deuxième\ figure, on\ obtient$:

$\boxed{x = D - QM.\cos\alpha}$ (1) $\ et\ $ $\boxed{y = D-(EQ-QM.\sin\alpha)}$ (2)

$Or\ d'après\ la\ question\ (2), on\ a :$

$\boxed{x = V_B.\cos\theta.t}$ (3) et $\boxed{y=-\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2+V_B.\sin\theta.t}$ (4)

$\Longrightarrow (1)\ et\ (3)\ donnent :\ D - QM.\cos\alpha = V_B.\cos\theta.\Longrightarrow$ $\boxed{QM=\frac{D-V_B.\cos\theta.t}{\cos\alpha}}$ (5)

$(2) et\ (4) donnent :$ $\boxed{-\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2+V_B.\sin\theta.t-D+EQ-QM.\sin\alpha=0}$ (6)

$\Longrightarrow (5) et\ (6) donnent :$

$$-\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2+V_B.\sin\theta.t-(\frac{D-V_B.\cos\theta.t}{\cos\alpha}).\sin\alpha=0$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2+V_B.\sin\theta.t-D.\tan\alpha+V_B.t.\cos\theta.\tan\alpha=0$$

$$\Longrightarrow \|\vec{g}\|.t^2-2.V_B.(\sin\theta+\cos\theta.\tan\alpha).t+2.D.\tan\alpha=0$$

$\Longrightarrow\ \Delta' = {V_B}^2.(\sin\theta+\cos\theta.\tan\alpha)^2 - 2.\|\vec{g}\|.D.\tan\alpha\ \ A.N : \Delta' = 6.45 \Longrightarrow \sqrt{\Delta'} = 2.54$

$Alors : t = 0.16\ s$ $\ ou\ $ $t = 0.66\ s$: $On\ choisit\ la\ date\ la\ plus\ grande\ car\ le$ $solide\ en\ partant\ de\ B\ s'élève\ à\ une\ distance\ supérieure\ à\ D\ or\ EQ = D\ d'ou\ la$ $rencontre\ avec\ le\ plan\ à\ cette\ date\ est\ impossible\ alors\ la\ rencontre\ est\ possible\ à\ la$ $descente\ du\ solide\ c.a.d\ à\ la\ deuxième\ date.$

$$Par\ suite\ :\quad t = 0.66\ s\ \ Or : QM = \frac{D - V_B.\cos\theta.t}{\cos\alpha}\ \ d'ou : QM = 1.41\ m$$

Alors le solide atteint le plan à $1.41\ m$ *de son sommet.*

6) *Pour que le solide ne touche pas le plan, il faut soit faire avancer soit faire reculer ce dernier sur le sol dans le sens du point* K. *Soient* d_1 *et* d_2 *les déplacements possibles du du plan.*

$$\boxed{1^{er}\ cas\ \ si\ l'on\ fait\ avancer\ le\ plan\ vers\ le\ point\ K}$$

$d_1 = QM.\cos\alpha\ \ A.N : d_1 = 1.38\ m$

$$\boxed{2^{ème}\ cas\ \ si\ l'on\ fait\ reculer\ le\ plan\ vers\ le\ sens\ inverse}$$

$$On\ remarque\ que\ \ d_1 + d_2 = \frac{QE}{\tan\alpha} \Longrightarrow d_2 = \frac{QE}{\tan\alpha} - d_1\ \ A.N :\ d_2 = 15.6\ m$$

Exercice n°3 :

1)*a* − *Soient* A, B *et* C *respectivement les points du départ, de l'arrivée au sol et de l'annulation de la vitesse du solide après avoir sauté à partir du sol. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points* A *et* B :

$$A \xrightarrow{\Delta Ec} B = \sum A \xrightarrow{W} B\,(\overrightarrow{F_{ext}})\ \ d'où\ \ \frac{1}{2}\,m.(V_B^2 - V_A^2) = A \xrightarrow{W(\vec{P})} B$$

$$Par\ suite\ \frac{1}{2}\,m\,(V_B^2 - V_A^2) = m.\|\vec{g}\|.d\qquad Or\ \ V_A = 0, alors\ \boxed{V_B^2 = 2.\|\vec{g}\|d}\ (1)$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points B *et* C :

$$B \xrightarrow{\Delta Ec} C = \sum B \xrightarrow{W} C\,(\overrightarrow{F_{ext}})\ \ d'où\ \ \frac{1}{2}\,m.(V_C^2 - V_B^2) = B \xrightarrow{W(\vec{P})} C$$

Par suite

$$\frac{1}{2}\,m\,(V_C^2 - V_B^2) = -\,m.\|\vec{g}\|.d'(travail\ résistant)\qquad Or\ \ V_C = 0, alors\ \boxed{V_B^2 = 2.\|\vec{g}\|d'}\,(2)$$

(1) *et* (2) *donnent* : $\boxed{d = d'}$

b- *Puisque toutes les forces dissipatives sont négligeables, l'énergie cinétique se conserve d'où l'infinité du mouvement.*

c- *Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points* A *et* B :

$$A \xrightarrow{\Delta Ec} B = \sum A \xrightarrow{W} B\,(\overrightarrow{F_{ext}})\ \ d'où\ \ \frac{1}{2}\,m.(V_B^2 - V_A^2) = A \xrightarrow{W(\vec{P})} B$$

Par suite $\frac{1}{2}\, m\,(V_B^2 - V_A^2) = m.\|\vec{g}\|.d$ Or $V_A = 0$, alors $\boxed{V_B^2 = 2.\|\vec{g}\|d}$ (1)

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points B et C :

$B \xrightarrow{\Delta Ec} C = \sum B \xrightarrow{W} C\,(\overrightarrow{F_{ext}})$ d'où $\frac{1}{2}\, m.(V_C^2 - V_B^2) = B \xrightarrow{W(\vec{P})} C$

Par suite

$\frac{1}{2}\, m\,(V_C^2 - V_B^2) = -m.\|\vec{g}\|.d'$ (*travail résistant*) $\Longrightarrow \boxed{V_B^2 - V_C^2 = 2.\|\vec{g}\|.d'}$ (2)

(1) *et* (2) *donnent* : $2.\|\vec{g}\|d - V_C^2 = 2.\|\vec{g}\|.d' \Longrightarrow \boxed{V_C^2 = 2.\|\vec{g}\|.(d - d')}$ (3)

Le mouvement entre C et B est rectiligne uniformment accéléré d'accélération $\|\vec{g}\|$

(*chute libre avec vitesse initiale*), *alors* : $d' = \frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_C.t$

$\Longrightarrow V_C = \frac{2.d' - \|\vec{g}\|.t^2}{2.t} \Longrightarrow \boxed{V_C^2 = \frac{d'^2}{t^2} + \frac{\|\vec{g}\|.t^2}{4} - \|\vec{g}\|.d'}$ (4) $\Longrightarrow$ (3) *et* (4) *donnent* :

$\frac{d'^2}{t^2} + \frac{\|\vec{g}\|.t^2}{4} - \|\vec{g}\|.d' = 2.\|\vec{g}\|.(d - d') \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{t^2}d'^2 + \|\vec{g}\|.d' + \frac{\|\vec{g}\|.t^2}{4} - 2.\|\vec{g}\|.d}$

Posons $d' = X \Longrightarrow \Delta = \|\vec{g}\|^2 - \|\vec{g}\| + \frac{8.\|\vec{g}\|.d}{t^2}$ $A.N$: $\Delta = 16090 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 126.84$

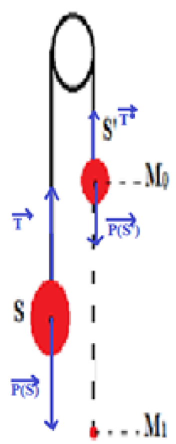
$X = -0.68$ (à *rejeter car* $X = d' > 0$) *ou* $X = 0.584$ *Par suite* $d' \cong 0.6\, m \cong 60\, cm$

2)*a* – *Choisissons un sens positif arbitraire. D'après la R.F.D, on a :*

$m'.a = m'\|\vec{g}\| - \|\vec{T'}\|$ et $\mathrm{m.a} = -\mathrm{m}.\|\vec{g}\| + \|\vec{T}\|$ Or la poulie et le fil sont de masses

négligeables alors : $\|\vec{T}\| = \|\vec{T'}\|$ par suite : $m'\|\vec{g}\| - m'.a = \mathrm{m}.\|\vec{g}\| + \mathrm{m.a}$

$\Longrightarrow a.(m + m') = \|\vec{g}\|.(\mathrm{m'} - \mathrm{m}) \Longrightarrow \boxed{a = \frac{\|\vec{g}\|.(\mathrm{m'} - \mathrm{m})}{(m + m')}} \Longrightarrow \mathrm{A.N} : \mathrm{a} = -5\mathrm{m.s^{-2}}$



$a < 0$ *d'ou le sens positif du mouvement est celui de* (*S*). *Alors le système se déplace vers le sens de* (*S*).

b – *Dans le premier cas, le mouvement s'est effectué dans le sens de* (*S*), *mais dans le* $2^{\text{ème}}$ *cas, on fait acquérir* (*S'*) *une énergie supplémentaire qui lui permet de déplacer* (*S*) *pourtant* $m > m'$. *Lorsque cette énergie s'annule, le mouvement s'effectue dans le sens initial.*

$\boldsymbol{c} -$ *Appliquons le théorème de l'énegie cinétique entre les points M_0 et M_1 :*

$$M_0 \xrightarrow{\Delta Ec} M_1 = \sum M_0 \overset{W}{\rightarrow} M_1 \ (\overrightarrow{F_{ext}}) \ d'où \ \frac{1}{2} m'.(V_{M_1}^2 - V_{M_0}^2) = M_0 \xrightarrow{W(\overrightarrow{P'})} M_1$$

$$Or\ V_{M_0} = 0 \ \ D'ou \ \frac{1}{2} m'.V_{M_1}^2 = m'.\|\vec{g}\|.M_0M_1 \Rightarrow \boxed{V_{M_1}^2 = 2.\|\vec{g}\|.M_0M_1} \ (1)$$

Soit M_2 le point d'annulation de la vitesse de (S'). Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points M_1 et M_2 :

$$M_1 \xrightarrow{\Delta Ec} M_2 = \sum M_1 \overset{W}{\rightarrow} M_2 \ (\overrightarrow{F_{ext}}) \ d'où \ \frac{1}{2} m'.(V_{M_2}^2 - V_{M_1}^2) = M_1 \xrightarrow{W(\overrightarrow{P'})} M_2 \ - M_1 \xrightarrow{W(\overrightarrow{P})} M_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m'.V_{M_1}^2 = m.\|\vec{g}\|.M_1M_2 - m'.\|\vec{g}\|.M_1M_2 \Rightarrow \boxed{V_{M_1}^2 = \frac{2.\|\vec{g}\|.M_1M_2.(m-m')}{m'}} \ (2)$$

$$(1) et\ (2) donnent : \boxed{M_0M_1 = \frac{M_1M_2.(m-m')}{m'}} \quad A.N : \ M_0M_1 = 20\ cm$$

Exercice n°4 :

1) *D'après la R.F.D, on a :* $\quad m.\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \Rightarrow m.\vec{a} = m.\vec{g}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Par suite, on a : $\vec{a} = o.\vec{\imath} + (-\|\vec{g}\|).\vec{\jmath}$

$$Or\ \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad d'où \quad \vec{V} = V_0.\cos\theta.\vec{\imath} + (-\|\vec{g}\|.t + V_0.\sin\theta).\vec{\jmath}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad D'où \quad \overrightarrow{OM} = V_0.\cos\theta.t.\vec{\imath} + (-\tfrac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin\ \theta.t).\vec{\jmath}$$

2) *D'après ce qui précède, on a :* $\boxed{x = V_0.\cos\theta.t}$ *Et* $\boxed{y = -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin\theta.t}$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|\frac{x^2}{{V_B}^2.\cos^2\theta} + tan\theta.x \quad Or \quad x \ll V_B \ \ alors \ \boxed{y \cong tan\theta.x}$$

$\Rightarrow$ *L'équation de la trajectoire est celle d'une droite, d'ou le mouvement du solide entre les points P et Q est rectiligne.*

3) *D'après ce qui précède, on a :* $tan\theta = \frac{y}{x} \quad A.N : \ tan\theta = 0.5 \Rightarrow \theta = 26.56°$

4) *On a* $\vec{V} = V_0.\cos\theta.\vec{\imath} + (-\|\vec{g}\|.t + V_0.\sin\theta).\vec{\jmath}$ *Or le solide rebrousse chemin*

lorsque la vitesse est minimale D'ou $-\|\vec{g}\|.t + V_0.\sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{V_0.\sin\theta}{\|\vec{g}\|}}$

$$A.N : t = 17.88\ s$$

On a : $x = V_0.\cos\theta.t$ *Or* $t = 17.88\ s \Rightarrow x = 6397.22\ m$

Exercice n°5:

Soit m la masse du voleur. Adoptons un repère orthonormé dont l'origine est le point de saut du voleur, le sens positif est celui du mouvement et l'axe des abscisses est parallèle à l'horizontale.

D'après la R.F.D, on a : $m.\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \Rightarrow m.\vec{a} = m.\vec{g}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Par suite, on a : $\vec{a} = o.\vec{\imath} + (-\|\vec{g}\|).\vec{\jmath}$

Or $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ *d'où* $\vec{V} = V_0.\cos\theta.\vec{\imath} + (-\|\vec{g}\|.t + V_0.\sin\theta).\vec{\jmath}$

$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ D'où $\overrightarrow{OM} = V_0.\cos\theta.t.\vec{\imath} + (-\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin\theta.t).\vec{\jmath}$

Alors : $x = V_0.\cos\theta.t \Rightarrow \frac{x}{V_0.\cos\theta}$ *Or* $y = -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin\theta.t$

Alors : $\boxed{y = -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|\frac{x^2}{{V_0}^2.\cos^2\theta} + tan\theta.x} \Rightarrow \boxed{V_0 = \sqrt{\frac{\|\vec{g}\|.x^2}{2.(tan\theta - y).\cos^2\theta}}}$

Or le point de cordonnées $(3, -98.5)$ *appartient à la trajectoire.*

$\boldsymbol{Rq}: \mathbf{-98.5 = -(100 - 1.5)} \Rightarrow A.N : V_0 = 0.95\ m.s^{-1}.\ y = -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin\theta.t$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin\theta.t - y = 0 \Rightarrow \Delta = (V_0.\sin\theta)^2 - 2.\|\vec{g}\|.y$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{(V_0.\sin\theta)^2 - 2.\|\vec{g}\|.y}$ $A.N : \sqrt{\Delta} = 44.4 \Rightarrow t = 4.5\ s$

Conclusion : le trajet du voleur vers la remorque a duré $4.5\ s$.

Or le mouvement du camion est rectiligne uniforme D'ou : $V = \frac{x}{t}$

$A.N : V = 22.22\ m.s^{-1} = 80\ km.h^{-1}$